

اعداد گنگ

اعداد حقیقی

به نام خدا

در جلسه قبل تبدیل کسر به اعشار رو یاد گرفتیم و دیدیم که وقتی به کسر رو به اعشار تبدیل می‌کنیم چند حالت ممکنه به وجود بیاد:

۱. **یه حالت اینه که عدد اعشاری ما مفتوم باشه**

یعنی وقتی صورت رو بر مخرج تقسیم می‌کنیم این تقسیم به با تموم شه.

مثل تقسیم ۳ بر ۸ که در جلسه قبل انجام دادیم.

۲. **یه حالت اینه که عدد اعشاری ما مفتوم نباشه ولی به تکرار بیفته.**

یعنی وقتی صورت رو بر مخرج تقسیم می‌کنیم عددهایی که توی خارج قسمت می‌نویسیم از یه جایی به بعد مدام تکرار بشن.

مثلا در تقسیم ۱ بر ۳ که در جلسه قبل انجام داریم، ۳ مدام توی خارج قسمت تکرار می‌شد. یا مثلا در تقسیم ۷ بر ۶، از یه جایی به بعد مدام ۶ در خارج قسمت تکرار می‌شد.

امروز می‌فوایم با یه حالت سوم آشنا بشیم.

در این حالت عدد اعشاری ما مفتوم نیست ولی به تکرار هم نمیفته یعنی ما هر چی تقسیم رو ادامه بدیم هر بار یه عدد جدید به خارج قسمت اضافه میشه. پس میایم حالت سوم رو تعریف می‌کنیم:

۳. حالت سوم اینه که عدد اعشاری مفتوم نباشه و به تکرار هم نیفته.

یه بار دیگه این سه قسمت رو خلاصه می‌گم، به تفاوتاش دقت کنید:

برای تبدیل کسر به عدد اعشاری، بعد از تقسیم صورت به مخرج:

حالت ۱. عدد اعشاری مفتوم میشه

حالت ۲. عدد اعشاری مفتوم نمیشه ولی به تکرار میفته

حالت ۳. عدد اعشاری مفتوم نمیشه، به تکرار هم نمیفته

این حالت سوم یه مفهوم جدید رو به ما معرفی میکنه. "اعداد گنگ یا اصم"

بنابراین اگه کسری داشتیم که بعد از تقسیم صورت به مخرج، عدد اعشاریش مفتوم نشد و به تکرار هم نیفتاد، اون کسر یه عدد گنگ هست.

یه مثال دیگه از اعداد گنگ بزنیم ☺

ما برای پیدا کردن محیط یا مساحت دایره از عدد π استفاده می‌کنیم و برای سادگی همیشه مقدار این عدد رو $3/14$ در نظر می‌گیریم، ولی عدد π یه عدد گنگه و قسمت اعشاریش تموم نمیشه

در زمانهای قدیم تا ۱۰۰۰ رقم اعشارش رو تونستن مناسبه کنن و الان با ماشین حسابهای پیشرفته، این تعداد به میلیارد هم رسیده ☺

ممکنه این سوال براتون به وجود بیاد که بجز این مثالهایی که گفتیم، کدوم یکی از اعدادی که ما می‌شناسیم گنگ هستن. (اگر هم این سوال براتون به وجود نیومده من براتون توضیح میدم ☺)

ما با جذر عددها آشنا هستیم مثلاً می‌دونیم $\sqrt{4}$ برابر ۲ میشه یا $\sqrt{9}$ برابر ۳ میشه، آیا می‌تونیم حاصل $\sqrt{2}$ رو هم به همین سرعت و دقت به دست بیاریم؟

اگه جذر ۲ رو با ماشین حساب به دست بیاریم، می‌بینیم که جوابمون یه عدد اعشاری هست که ته نداره، یعنی رقم‌های اعشارش هی ادامه داره. چه نتیجه‌ای می‌تونیم بگیریم؟ "عدد ۲ هم یه عدد گنگ هست"

ولی فب ما که همیشه ماشین حساب نداریم که بفوایم بفهمیم یه عدد گنگ هست یا نه! پس چکار کنیم؟؟؟
به قانون زیر توجه کنید:

اگر n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ گنگ است.

مثلاً توی سه تا مثال بالا، چون ۴ و ۹ مربع کامل هستند پس $\sqrt{4}$ و $\sqrt{9}$ ، گنگ نیستن ولی ۲ چون مربع کامل نیست بنابراین $\sqrt{2}$ گنگه.
۵ تا عدد گنگ مثال بزنید:

گفتیم اگه عددی مربع کامل نباشه، جذرش یه عدد گنگ میشه، پس ۵ تا عدد که مربع کامل نیستن انتخاب می‌کنیم و جذرشون رو می‌نویسیم:

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$$

امروز با یه مجموعه جدید از اعداد آشنا شدیم، اعداد گنگ! این مجموعه جدید رو با نماد $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش میدیم.

در اینجا می‌فوایم ارتباط بین مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ رو با هم ببینیم.

قبل از اینکه ارتباط این مجموعه رو ببینیم به بار مرور کنیم ببینیم اینا چی بودن :

$\mathbb{N}$ ، مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

$\mathbb{Z}$ ، مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

$\mathbb{Q}$ ، مجموعه اعداد گویا

این مجموعه رو نمی‌تونیم شبیه اعداد طبیعی و اعداد صحیح، با یه مجموعه از اعداد نشون بدیم، چون این مجموعه خیلی گسترده‌س و عضوای زیادی داره.

مجموعه اعداد گویا رو به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

هر عددی را که بتوان به فرم کسری نوشت به طوری که صورت و مخرج اعدادی صحیح و مخرج مخالف صفر باشد، در مجموعه اعداد گویا قرار دارد.

تعریف ریاضی اعداد گویا به صورت زیر است:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

بریم از روی شکل رابطه بین این مجموعه ها رو ببینیم:

اول از رابطه بین اعداد طبیعی و اعداد صحیح شروع می‌کنیم:

قبول دارید که هر عددی که طبیعی باشه حتماً صحیح هم هست؟

اگه قبول ندارید به بار دیگه مجموعه های زیر رو ببینید:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

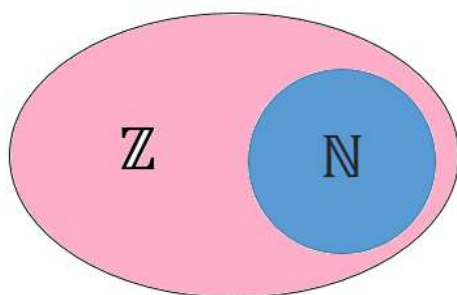
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

الان هر عددی که توی مجموعه اعداد طبیعی وجود داره توی اعداد صحیح هم هست (با رنگ قرمز مشخص کردیم). پس نتیجه زیر رو داریم:

"هر عضو مجموعه $\mathbb{N}$ ، به مجموعه $\mathbb{Z}$ نیز تعلق دارد"

این جمله چی رو به ما نشون میده؟ نشون میده که $\mathbb{N}$ زیر مجموعه $\mathbb{Z}$ هست.

بیایم اینو با شکل نشون بدیم:



یه نکته رو یادتون باشه، وقتی با شکل قراره نشون بدیم که یه مجموعه، زیرمجموعه یه مجموعه دیگه‌س، اونو باید توی دل مجموعه بزرگه بذاریم،

مثلا اینجا چون می‌فواستیم بگیم $\mathbb{N}$ زیرمجموعه $\mathbb{Z}$ هست، اونو کاملاً توی $\mathbb{Z}$ گذاشتیم.

تا اینجا ارتباط اعداد طبیعی و اعداد صحیح رو فهمیدیم. حالا بریم سراغ ارتباطشون با مجموعه اعداد گویا

توی تعریف اعداد گویا گفتیم:

هر عددی را که بتوان به فرم کسری نوشت به طوری که صورت و مخرج اعدادی صحیح و مخرج مخالف صفر باشد، در مجموعه اعداد گویا قرار دارد.

از طرفی می‌دونیم هر عددی که مخرج نداره مفرش یکه، پس می‌تونیم برای همه اعداد طبیعی و کسری مخرج ا بذاریم.

$$\mathbb{N} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \dots \right\}$$

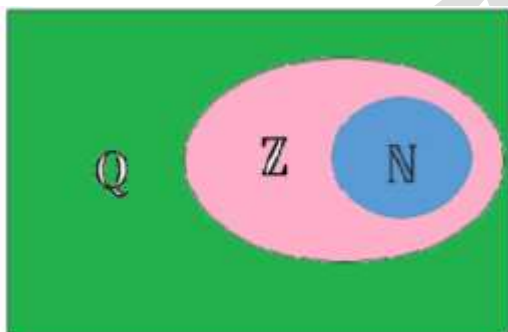
$$\mathbb{Z} = \left\{ \dots, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots \right\}$$

حالا دقیقاً توی تعریف اعداد گویا صدق می‌کنن. پس نتیجه می‌گیریم:

هر عضو مجموعه $\mathbb{N}$ و هر عضو مجموعه $\mathbb{Z}$ ، به مجموعه $\mathbb{Q}$ نیز تعلق دارد.

یعنی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ زیرمجموعه $\mathbb{Q}$ هستند. آگه بفوایم با شکل نشون بدیم بطوری میشه؟

$\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ کاملاً داخل $\mathbb{Q}$ قرار میگیرن. شکل زیر رو ببینید:



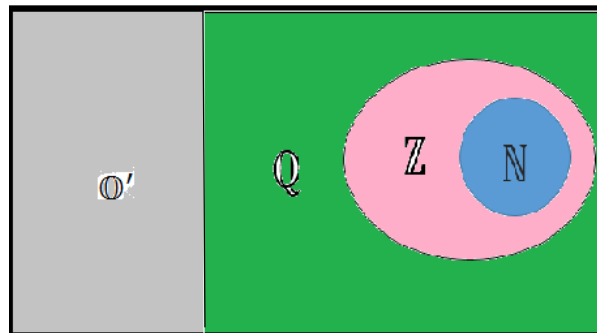
نتیجه‌هایی که از این شکل می‌تونیم بگیریم (البته قبل شکل هم توضیح دادیم):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$$

حالا نوبت مجموعه اعداد گنگ یا اصمه. مجموعه اعداد گنگ، هیچ ارتباطی با این سه تا مجموعه نداره

اعداد گویا و اعداد اصم هیچ اشتراکی با هم ندارن.

اگه بفوایم روی شکل نشون بدیم باید مجموعه اعداد گنگ رو کنار اعداد گویا بکشیم، طوری که هیچ اشتراکی با هم نداشته باشن



همینطور که می بینیم ، مجموعه اعداد گویا و اعداد اصم دو مجموعه کاملاً مجزا هستن. از این شکل می تونیم نتیجه های زیر رو بگیریم:

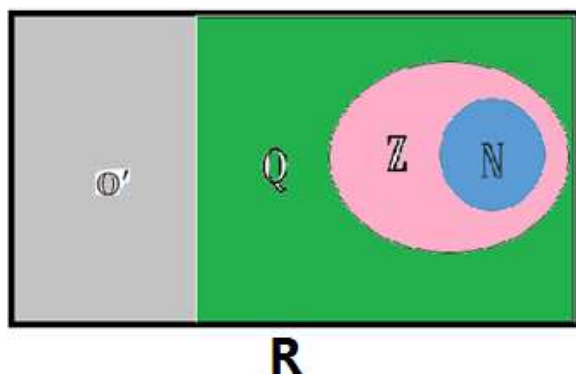
$$\mathbb{Q}' \not\subseteq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Q}' \quad , \quad \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{Q}' \quad , \quad \mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Q}'$$

الان دیگه ارتباط این مجموعه ها رو یاد گرفتیم.

حالا می فوایم یه مجموعه دیگه رو معرفی کنیم، **مجموعه اعداد حقیقی که اون رو با $\mathbb{R}$ نشون میدیم.**

اگه همه مجموعه هایی رو که بالا تعریف کردیم با هم در نظر بگیریم مجموعه اعداد حقیقی ساخته میشه. در واقع مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم روی همدیگه مجموعه اعداد حقیقی رو میسازن. پس



از این شکل چه نتیجه هایی می گیریم؟

$$Q' \subset \mathbb{R} \quad , \quad Q \subset \mathbb{R}$$

$$Q \cup Q' = \mathbb{R}$$

$$Q \cap Q' = \emptyset$$

چند تا سوال با هم حل کنیم:

۱- داخل $\circ$ علامت $\in$ یا $\notin$ بگذارید:

$4 \circ \mathbb{Z}$	$0.2 \circ \mathbb{Q}$	$\sqrt{18} \circ \mathbb{R}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \circ \mathbb{R}$
$-5 \circ \mathbb{R}$	$-\frac{7}{3} \circ \mathbb{Z}$	$\sqrt{25} \circ \mathbb{Q}'$	$\frac{1}{6} \circ \mathbb{R}$
$\sqrt{3/5} \circ \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0.9} \circ \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0.09} \circ \mathbb{Q}$	$\frac{9}{-1} \circ \mathbb{Z}$

هر عددی که ما تا اینجا باهاش آشنا شدیم، عضو مجموعه اعداد حقیقیه! پس بدون اینکه فکر کنیم، هر جا $\mathbb{R}$ داشتیم علامت $\in$ میذاریم:

$4 \in \mathbb{Z}$	$0/2 \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{18} \in \mathbb{R}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$
$-5 \in \mathbb{R}$	$-\frac{7}{3} \in \mathbb{Z}$	$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}'$	$\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0/09} \in \mathbb{Q}$	$\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$

حالا بریم سراغ اون‌ها که درباره $\mathbb{Z}$ ، پرسیده. مجموعه اعداد صحیح که یادتون هست عضو اش پیا بود.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

آیا ۴ عضو این مجموعه هست؟ بله

آیا $-\frac{7}{3}$ عضو این مجموعه هست؟ خیر

آیا $\frac{9}{-1}$ عضو این مجموعه هست؟ بله. چون $\frac{9}{-1} = -9$ میشه و -۹ هم عضو مجموعه اعداد صحیح هست.

نکته مهم: هر جا کسر دیدیم سریع نمی‌گیریم که عضو مجموعه اعداد صحیح نیست، اول تا جایی که می‌تونیم کسر رو ساده می‌کنیم، آگه بعد از ساده کردن باز هم خرم کسری داشت اونوقت می‌گیریم عضو $\mathbb{Z}$ نیست.

پس تا اینجا داریم:

$4 \in \mathbb{Z}$	$0/2 \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{18} \in \mathbb{R}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$
$-5 \in \mathbb{R}$	$-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$	$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}'$	$\frac{0}{6} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}'$	$\sqrt{0/09} \in \mathbb{Q}$	$\frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}$

آیا $0/2$ عضو Q هست؟ بله . چرا؟

چون $0/2 = \frac{2}{10}$ ، پس یه کسره که صورت و مخرجش عدد صحیح و مخرجش مخالف صفر. بنابراین عضو مجموعه Q هست.

از طرفی بدون اینکه به کسر تبدیلش کنیم می‌تونیم بگیم $0/2$ یه عدد اعشاری مفتومه بنابراین عضو مجموعه Q هست.

در جلسه قبل گفتیم "اگر n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ گنگ است"

حالا میایم اونایی که زیر رادیکال هستن رو نگاه می‌کنیم، اگه عدد زیر رادیکال مربع کامل بود میگیم عضو مجموعه اعداد گویاست و اگه مربع کامل نبود میگیم عضو مجموعه اعداد گنگه.

$\sqrt{25}$ رو در نظر بگیرید:

آیا ۲۵ مربع کامله؟ بله $\sqrt{25} = 5$ ، پس $\sqrt{25} \in Q$.

$\sqrt{3/5}$ چی؟

آیا $3/5$ مربع کامله؟ نه . پس $\sqrt{3/5} \notin Q$.

$\sqrt{0/9}$ رو ببینید:

$0/9$ مربع کامله؟ نه . پس $\sqrt{0/9} \notin Q$.

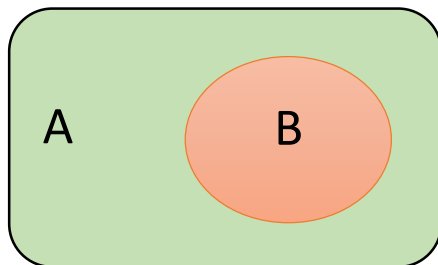
اما $\sqrt{0/09}$ عضو مجموعه اعداد گویاست. چرا؟

چون $0/9$ مربع کامله و $0/3 = \sqrt{0/09}$.

بنابراین جواب نهایی ما به صورت زیر میشه:

$$\begin{array}{cccc}
 4 \in \mathbb{Z} & 0.2 \in \mathbb{Q} & \sqrt{18} \in \mathbb{R} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \\
 -5 \in \mathbb{R} & -\frac{7}{3} \in \mathbb{Z} & \sqrt{25} \in \mathbb{Q}' & \frac{0}{6} \in \mathbb{R} \\
 \sqrt{3/5} \in \mathbb{Q}' & \sqrt{0/9} \in \mathbb{Q}' & \sqrt{0/0.9} \in \mathbb{Q} & \frac{9}{-1} \in \mathbb{Z}
 \end{array}$$

قبل از اینکه بریم سراغ حل سوال بعد ، به نکته درباره مجموعه و زیرمجموعه بهتون بگم.
فرض کنید دو تا مجموعه داریم که به صورت زیر با هم در ارتباطن:



مجموعه B کاملاً داخل مجموعه A قرار گرفته، پس B زیرمجموعه A هست.

وقتی دو تا مجموعه به این صورت داریم که یکی زیر مجموعه دیگری هست:

اجتماع دو مجموعه همیشه مجموعه بزرگتر و

اشتراک دو مجموعه همیشه مجموعه کوچکتر

مثلاً بین مجموعه های اعداد که تعریف کردیم، N زیرمجموعه Z بود،

پس اجتماع این دو مجموعه همیشه مجموعه بزرگتر یعنی Z و

اشتراک این دو مجموعه همیشه مجموعه کوچکتر یعنی N

حالا Q و Z رو در نظر بگیرید، جاسه قبل نشون دادیم که Z زیرمجموعه Q هست، بنابراین:

اجتماع Q و Z همیشه مجموعه بزرگتر یعنی Q

اشتراک Q و Z همیشه مجموعه کوچکتر یعنی Z

مثال:

۳- طرف دوم تساوی های زیر را کامل کنید :

$$۱) N \cup Z =$$

$$۲) R - Q' =$$

$$۳) Z \cap N =$$

$$۴) R \cap Q' =$$

با توجه به توضیحاتی که صفحه قبل گفتیم، داریم:

$$N \cup Z = Z$$

$$R - Q' = Q$$

$$Z \cap N = N$$

$$R \cap Q' = Q'$$

حل تمرین صفحه ۲۷

عددهای حقیقی

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	0	π	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229....$	-10	$\frac{6}{2}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
$\mathbb{W}$ حسابی	x	x	✓	x	x	x	x	✓
$\mathbb{Z}$ صحیح	x	x	✓	x	x	x	✓	✓
$\mathbb{Q}$ گویا	x	✓	✓	x	✓	x	✓	✓
$\mathbb{Q}'$ گنگ	✓	x	x	✓	x	✓	x	x
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتفانی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.